Calcul tensoriel

par **Gilles CHÂTELET**
Ancien Élève de l'École Normale Supérieure de St-Cloud
Docteur ès Sciences Mathématiques
Professeur à l'Université de Paris VIII

*En mécanique classique, et spécialement en mécanique newtonienne, les effets physiques résultent des **forces** agissant sur les **corps solides**. Comme objet mathématique, la force est un **vecteur**. Il existe une définition **intrinsèque** purement opératoire des vecteurs comme éléments d'un espace vectoriel E sur un corps K (article **Calcul matriciel** [AF 86] dans le présent traité). Nous verrons (§ 1.1) qu'il existe une autre définition des vecteurs, plus satisfaisante pour le physicien, et d'ailleurs plus fructueuse d'inspiration pour le mathématicien. Certains domaines de la physique, en particulier la mécanique des milieux continus (article [A 303] **Déformation et contraintes dans un milieu continu** et autres articles de la rubrique **Calcul des structures** dans le présent traité), privilégient d'autres concepts mathématiques : en particulier le concept de **tenseur.***

*Il existe **deux définitions équivalentes des tenseurs en dimension finie** (dans la suite de cet article, nous nous limiterons au calcul tensoriel sur les espaces de dimension finie) :*

*— le calcul tensoriel **intrinsèque**, qui est l'introduction d'une multiplication formelle sur un espace vectoriel ;*

*— le calcul tensoriel **des physiciens** : un tenseur est un tableau de nombres attaché à une base particulière de l'espace vectoriel E et se transforme suivant une loi donnée par changement de base.*

Le présent article comprend quatre paragraphes :

— un premier paragraphe précise, pour les vecteurs et les formes, les notions de ***covariance*** *et de* ***contravariance*** *;*

— un deuxième paragraphe, inspiré par l'exemple précédent, donne les ***définitions des tenseurs*** *et établit leur* ***équivalence*** *;*

— un troisième paragraphe étudie spécifiquement le ***produit extérieur*** *et la définition des* ***déterminants*** *;*

— le paragraphe 4 donne une application des tenseurs à la ***relativité restreinte*** *et à l'****électromagnétisme****.*

1. Dualité. Covariance et contravariance dans un espace vectoriel

On considère un espace vectoriel E de dimension n sur un corps K.

Le plus généralement, K désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels, le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

1.1 Les vecteurs des physiciens. Contravariance

Soient $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ deux bases de E. Rappelons les relations donnant les composantes d'un vecteur x de E sur la base (f_j) en fonction de celles associées à la base (e_i) (article *Calcul matriciel* [AF 86] dans le présent traité).

On part de $x = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x^i e_i = \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} y^j f_j$.

Si $f_j = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_j^i e_i$, on sait que :

$$x^i = \sum_j a_j^i y^j \; ; \; 1 \leqslant j \leqslant n, \; 1 \leqslant i \leqslant n \qquad \textbf{(1)}$$

Si au contraire les coefficients b_i^k sont définis par $e_i = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} b_i^k f_k$, nous pouvons écrire :

$$y^j = \sum_k b_k^j x^k \qquad \textbf{(2)}$$

Avec l'écriture du calcul matriciel, $(a_j^i) = A$ fournit une matrice carrée inversible.

Par **convention**, l'indice du haut est celui des lignes, l'indice du bas celui des colonnes.

La formule (1) s'écrit $x = A\,y$; (b_i^k) et (a_j^i) sont liés par :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_j^i b_i^k = \delta_k^j$$

avec $\delta_k^j = 0$ si $j \neq k$ et 1 si $j = k$ (*symbole de Kronecker*).

On peut donc écrire : $$(b_i^k) = A^{-1} \qquad \textbf{(3)}$$

Supposons maintenant que l'on décide d'appeler **vecteur** un système de n nombres $(x_{(e)}^i)$ attachés à chaque base (e) d'un espace E, système qui se transforme suivant la loi (2). Autrement dit, en notation matricielle, si $A_{(e)}^{(f)}$ est la matrice de changement de base $(e) \to (f)$, $x_{(e)}$ et $x_{(f)}$ sont liés par :

$$x_{(e)} = A_{(e)}^{(f)} \, x_{(f)}$$

Nous pouvons associer à ces systèmes de nombres $(x_{(e)}^i)$ et $(x_{(f)}^i)$ les vecteurs $\overrightarrow{x}_{(e)}$ et $\overrightarrow{x}_{(f)}$ définis par :

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{x}_{(e)} &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_{(e)}^i e_i \\ \overrightarrow{x}_{(f)} &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} x_{(f)}^j e_j \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4)}$$

Montrons que $\overrightarrow{x}_{(e)} = \overrightarrow{x}_{(f)}$. Utilisant (1), (2) et (4), nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{x}_{(e)} = \sum_i x_{(e)}^i e_i = \sum_{i,\,j,\,k} a_j^i y^j b_i^k f_k$$

Et, remarquant (3) :

$$\overrightarrow{x}_{(e)} = \sum_{j,\,k} \delta_k^j y^k f_k = \sum y^j f_j = \overrightarrow{x}_{(f)}$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{x}_{(e)}$ associé aux composantes $x_{(e)}^i$ par la formule (4) **ne dépend pas du choix de la base** (e) **pourvu que la loi de transformation** (2) **soit respectée.**

Cette loi de transformation caractérise un certain type d'objet associé aux bases de E : les **objets contravariants**, dont les tenseurs d'un certain type seront les représentants les plus généraux comme nous allons le voir (§ 2).

Nous pouvons envisager d'autres lois de transformation associées aux changements de base. C'est le cas des formes linéaires sur E que nous définissons maintenant.

1.2 Espace dual. Covariance

Une **forme linéaire** ω sur E est une application linéaire de E dans le corps K. L'ensemble des formes linéaires sur E est l'**espace dual** de E, noté E^*. L'espace E^* est un espace vectoriel (également sur le corps K) comme le montre la définition des opérations suivantes :

$$x \in E, \; (\omega + \omega')(x) = \omega(x) + \omega'(x)$$

$$\lambda \in K, \; (\lambda\omega)(x) = \lambda[\omega(x)]$$

On peut alors prouver facilement (article [A 101] *Analyse fonctionnelle* dans le présent traité) la proposition suivante.

■ **Proposition 1 :** E^* étant un espace de dimension n égale à celle de E, si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E, il existe une base (e^i) de E^*, canoniquement associée, appelée base duale des (e_i) et définie par :

$$e^i(e_k) = \delta^i_k \quad \textbf{(5)}$$

Les composantes d'une forme ω sur e^i sont alors :

$$\omega_i = \omega(e_i) \quad \textbf{(6)}$$

D'une manière analogue au paragraphe précédent, on peut s'intéresser aux lois de transformation des coordonnées (ω_i) par changement de base. Si (f_k) est une autre base de E, la base duale, notée (f^k), s'exprime en fonction des (e^i) par la formule :

$$f^k = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} c^i_k e^i \quad \textbf{(7)}$$

Conformément à la convention utilisée pour les matrices de changement de base, dans la matrice (c^i_k), i est l'indice des lignes et k celui des colonnes.

Appliquant (6) à la décomposition (7) de la forme f^k, on obtient :

$$c^i_k = f^k(e_i) \quad \textbf{(8)}$$

Sachant que $e_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} b^j_i f_j$, il vient alors, en utilisant (5) :

$$c^i_k = \sum_j b^j_i f^k(f_j) = \sum_j \delta^k_j b^j_i = b^k_i$$

Rappelons que $(b^k_i) = A^{-1}$, soit $(c^i_k) = (A^t)^{-1}$.

A^t est la matrice dite **transposée** de la matrice A (lignes et colonnes sont échangées, article [AF 86] *Calcul matriciel* dans le présent traité).

Nous concluons que **si** $\boldsymbol{A}$ **est la matrice associée au changement de base** $(e_i) \to (f_j)$, $(A^t)^{-1}$ **est celle associée au changement** $(e^i) \to (f^j)$ **des bases duales associées.**

Étudions les lois de transformation des coordonnées.

Si $$\omega = \sum_i \omega_i e^i = \sum_k \mu_k f^k$$

avec, suivant (6), $\omega_i = \omega(e_i)$ et $\mu_k = \omega(f_k)$, nous avons, tenant compte de $e_i = \sum_k b^k_i f_k$ et $f_k = \sum_i a^i_k e_i$:

$$\left.\begin{aligned} \omega_i &= \sum_k b^k_i \mu_k \\ \mu_k &= \sum_i a^i_k \omega_i \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(9)}$$

Ces lois de transformation sont, dans un sens évident, plus *directes* que les lois contravariantes (1) et (2). Elles caractérisent les **objets covariants** de E dont les *formes linéaires* sont des cas particuliers.

Il existe donc une différence profonde de comportement entre les composantes des **vecteurs** et celles des **formes** lorsqu'on effectue un changement de base. Cela s'explique par le fait mathématique suivant : **il n'existe pas, dans le cas général, un isomorphisme entre** $\boldsymbol{E}$ **et son dual qui ne fasse pas référence explicite au choix d'une base particulière de** E (article [A101] *Analyse fonctionnelle* dans le présent traité). On dit qu'il n'existe pas généralement d'*isomorphisme canonique* entre E et E^*. Un tel isomorphisme existe par contre si l'on spécialise E en le munissant, par exemple, d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée (article [AF86] *Calcul matriciel* pour la définition) ou d'une forme sesquilinéaire non dégénérée.

Nous traitons le premier cas dans le paragraphe 1.3.

1.3 Dualité dans les espaces pseudo-euclidiens. Composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur

Nous définissons une application de dualité $I^{<>} : E \to E^*$ par :

$$I^{<>}(x)(y) = \langle x, y \rangle \quad \textbf{(10)}$$

où $\langle\ \rangle$ désigne une **forme bilinéaire symétrique non dégénérée.**

Exemple : le lecteur se reportera pour les détails à l'article [AF 86] *Calcul matriciel* dans le présent traité. Si E est muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\langle\ \rangle$, on a, dans chaque base (e_i) de E :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} x^i y^j g_{ij}$$

avec $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$.

La matrice *symétrique* à coefficients réels $(G^{(e)})^i_j = (G^{(e)})^j_i = g_{ij}$ est la matrice de $\langle\ \rangle$ dans la base (e_i). La forme $\langle\ \rangle$ étant non dégénérée, $G^{(e)}$ est inversible.

Si (f_j) est une autre base de E et si A est la matrice de passage de (e_i) à (f_j), on a :

$$G^{(f)} = A^t G^{(e)} A$$

Il existe en outre une base remarquable de E telle que $g_{ij} = \pm\,\delta^i_j$, c'est-à-dire :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{1 \leqslant k \leqslant s} x^k y^k - \sum_{n-s \leqslant \ell \leqslant n} x^\ell y^\ell$$

Le nombre s (nombre de signes +) est un invariant de $\langle\ \rangle$ qui est symbolisé par :

$$(\overbrace{+\ldots+}^{s \text{ fois}},\ -\ldots-)$$

Si $s < n$, E est dit *pseudo-euclidien* (par exemple, § 4.1.1).

Si $s = n$, E est *euclidien* (c'est un espace pseudo-euclidien particulier) ; la forme $\langle\ \rangle$ est alors le *produit scalaire* habituel.

La non-dégénérescence de $\langle\ \rangle$ implique que si $I^{<>}(x)(y) = 0$ quel que soit y, alors $x = 0$. L'application $I^{<>}$ est donc injective et applique E dans E^*. Comme dim E = dim E^*, $I^{<>}$ est donc un isomorphisme : c'est l'**isomorphisme de dualité** associé à $\langle\ \rangle$. Cela permet d'identifier, *indépendamment de toute base*, le **vecteur** x de E à la **forme** $x^* = I^{<>}(x)$.

Examinons ce qui se passe au niveau des coordonnées ; si (e_i) est une base de E et si (e^i) est la base duale associée :

$$x = \sum x^i e_i$$
$$x^* = I^{<>}(x) = \sum x_i e^i$$

Par définition de x^* : $x^*(e_i) = \langle x, e_i \rangle$.

Mais suivant (6), il s'agit aussi de x_i, soit :

$$x_i = \langle x, e_i \rangle = \sum_j x^j \langle e_i, e_j \rangle \quad \textbf{(11)}$$

Cette formule permet d'identifier, *via* $I^{<>}$, x et x^* à un même élément de l'espace pseudo-euclidien E, dont les composantes sont (x^i) si on le considère comme un *vecteur* (point de vue *contravariant*) ou (x_i) si on le considère comme une *forme* (point de vue *covariant*). Cet élément est en général associé à un objet physique (comme nous le verrons en relativité restreinte, § 4).

Les calculs précédents donnent :

$$I^{<>}(e_i) = \sum_j g_{ij}\, e^j \tag{12}$$

Si (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}), les formules (11) et (12) peuvent s'écrire :

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \sum_j g_{ij}\, x^j \\ x^i &= \sum_j g^{ij}\, x_j \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Ces formules fondamentales, qui décrivent l'échange des points de vue covariant et contravariant que l'on peut adopter pour un *même élément* de E, s'appellent **règles d'abaissement et d'élévation des indices pour les espaces pseudo-euclidiens.**

2. Tenseurs en dimension finie

Nous donnons maintenant la définition des objets contravariants et covariants les plus généraux : les **tenseurs**. Ceux-ci s'obtiennent soit *intrinsèquement* à partir de formes multilinéaires sur E que nous allons définir maintenant, soit comme *tableaux* associés aux bases de E et soumis à certaines règles lors des changements de base.

Remarque : la première définition exige un effort de formalisation mathématique. On pourra, en première lecture, se contenter d'une étude des paragraphes 2.1 et 2.2 puis passer à 2.3.2 pour revenir ensuite sur les paragraphes omis.

2.1 Tenseurs comme formes multilinéaires

2.1.1 Définition

Soit $(E_\lambda)_{1 \leqslant \lambda \leqslant r}$ une famille d'espaces vectoriels sur K ; alors f est une **forme multilinéaire** sur $\overset{\lambda}{\Pi} E_\lambda$ si :

a) f est une application de $\overset{\lambda}{\Pi} E_\lambda$ dans K ;

b) $f(x_1, ..., x_i + y_i, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) + f(x_1 ..., y_i, ..., x_n)$;

$f(x_1, ..., \lambda x_i, ..., x_n) = \lambda\, f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$.

(f est linéaire par rapport à chaque variable).

Nous définissons $\overset{\lambda}{\otimes} E_\lambda$ (respectivement $\overset{\lambda}{\otimes} E^*_\lambda$) comme l'espace vectoriel des formes multilinéaires sur $\overset{\lambda}{\Pi} E^*_\lambda$ (respectivement sur $\overset{\lambda}{\Pi} E_\lambda$).

$\overset{\lambda}{\otimes} E_\lambda$ (resp. $\overset{\lambda}{\otimes} E^*_\lambda$) est le **produit tensoriel** des E_λ (resp. des E^*_λ).

Nous admettrons sans démonstration les propriétés suivantes.

■ **Proposition 2**

a) $\overset{\lambda}{\otimes} E_\lambda$ est indépendant de l'ordre d'indexation des espaces E_λ (les différents espaces obtenus sont en fait isomorphes). En particulier : $E \otimes F$ est isomorphe à $F \otimes E$.

b) Soit Λ un ensemble fini d'indices et (E_λ) une famille d'espaces indexés par Λ. Si $\Lambda = \Lambda_1 \cup ... \cup \Lambda_s$ est une partition de Λ, nous pouvons former les produits tensoriels :

$$F_k = \overset{\lambda \in \Lambda_k}{\otimes} E_\lambda,\ 1 \leqslant k \leqslant s$$

$$\overset{1 \leqslant k \leqslant s}{\otimes} F_k\ ;\ \overset{\lambda \in \Lambda}{\otimes} E_\lambda$$

On peut alors prouver que les espaces $\overset{k}{\otimes}(\overset{\Lambda_k}{\otimes} E_\lambda) = \overset{k}{\otimes} F_k$ et $\overset{\lambda \in \Lambda}{\otimes} E_\lambda$ sont isomorphes.

En particulier, $(E \otimes F) \otimes G = E \otimes (F \otimes G) = E \otimes F \otimes G$.

2.1.2 Espace des tenseurs mixtes d'un espace vectoriel

Les propriétés précédentes permettent de construire sans ambiguïté, à partir de l'espace E, les espaces :

$$\overset{p}{\otimes} E = \overset{1 \leqslant i \leqslant p}{\otimes} E_i \text{ (avec } E_i = E)$$

$$\overset{q}{\otimes} E^* = \overset{1 \leqslant j \leqslant q}{\otimes} E_j \text{ (avec } E_j = E^*)$$

$$E^p_q = (\overset{p}{\otimes} E) \otimes (\overset{q}{\otimes} E^*)$$

Les éléments de E^p_q sont appelés tenseurs mixtes p fois contravariants et q fois covariants. Ce sont des *formes multilinéaires* sur $\overset{i}{\Pi} E_i$ avec :

$$E_i = E^* \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant p$$
$$E_i = E \text{ pour } p + 1 \leqslant i \leqslant p + q$$

Exemples

a) $p = 0$, $q = 1$: il s'agit de l'espace dual E^*.

b) $p = 1$, $q = 0$: il s'agit de formes linéaires sur E^* et donc du dual $(E^*)^*$ de E^*. Montrons que celui-ci s'identifie canoniquement à E. Définissons l'application J de E dans $(E^*)^*$ par :

$$J(x)(y^*) = y^*(x)\ ;\ y^* \in E^*,\ x \in E$$

Il est immédiat que J est injective.

E étant de dimension finie, $\dim E^* = \dim (E^*)^*$.

J, étant linéaire, est alors un isomorphisme. L'espace des *formes* sur E^* s'identifie donc aux *vecteurs* de E : l'isomorphisme entre E et $(E^*)^*$ est canonique.

c) $p = 1$, $q = 1$, montrons que $E \otimes E^*$ (qui est par définition l'espace vectoriel des formes bilinéaires φ sur $E^* \times E$) s'identifie aux *endomorphismes* de E.

L'application $\omega^\varphi_x (x \in E)$ définie par $\omega^\varphi_x(y^*) = \varphi(x, y^*)$ est une forme sur E^* ; c'est donc un vecteur de E et l'application T construite à partir de φ et définie par $T(\varphi) = x \mapsto \omega^\varphi_x$ est un endomorphisme de E. Nous avons ainsi une application $\varphi \mapsto T(\varphi)$ de $E \otimes E^*$ dans les endomorphismes de E. On vérifie aisément que cette application est une injection dans deux espaces de même dimension ; c'est donc un *isomorphisme*.

2.2 Opérations sur les espaces de tenseurs

2.2.1 Multiplication des tenseurs

Si $t \in E_q^p$ et $t' \in E_{q'}^{p'}$, nous pouvons définir $t \otimes t'$, élément de $E_{q+q'}^{p+p'}$, par :

$$t \otimes t'(v, w) = t(v)t'(w) \text{ pour } \begin{cases} v \in E^{*p} \times E^q \\ w \in E^{*p'} \times E^{q'} \end{cases} \quad (14)$$

Cette opération, appelée *produit tensoriel*, jouit de toutes les propriétés habituelles de la multiplication dans un anneau. À noter qu'elle *n'est pas commutative.*

Exemple : tenseurs décomposables

Si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant \ell}$ est une famille de vecteurs de E, $\overset{i}{\otimes} x_i$ est une forme multilinéaire sur $\overset{\ell}{\Pi} E^*$ définie par :

$$\otimes x_i(\omega_1, \ldots \omega_\ell) = \omega_1(x_1) \ldots \omega_\ell(x_\ell)$$

On définit évidemment d'une manière analogue $\otimes \omega_j$ avec $\omega_j \in E^*$. Les éléments de cette forme sont les *tenseurs contravariants* (respectivement *covariants*) *décomposables.*

On peut aussi définir les *tenseurs mixtes décomposables.*

2.2.2 Contraction des tenseurs

Soit : $t = x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes \omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_q$

un élément décomposable de E_q^p. Nous verrons (§ 2.3.1) qu'il suffit de définir toutes les opérations à caractère multilinéaire sur ce type d'élément pour pouvoir les étendre ensuite par linéarité à l'espace tensoriel tout entier.

Nous définissons $C_j^i(t)$ (contraction de l'indice contravariant i et de l'indice covariant j agissant sur un tenseur t) par :

$$C_j^i(t) = \omega_j(x^i) \overset{k \neq i}{\otimes} x_k \overset{k' \neq j}{\otimes} \omega_{k'}$$

La contraction C_j^i est donc bien définie sur E_q^p. Elle fournit un élément de E_{q-1}^{p-1}.

Les deux opérations (multiplication et contraction) peuvent être définies moins abstraitement dans le cadre de l'*espace tensoriel des physiciens* qui fait l'objet du paragraphe suivant.

2.3 Dimension de l'espace des tenseurs mixtes

2.3.1 Bases standards de E_q^p associées aux bases de E

Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. Conformément au paragraphe 2.2.1, nous pouvons former les tenseurs mixtes décomposables :

$$e_{j_i} \otimes \ldots \otimes e_{j_p} \otimes e^{j_{p+1}} \otimes \ldots \otimes e^{j_{p+q}} \quad (15)$$

Si $t \in E_q^p$, un calcul très simple, utilisant les propriétés de multilinéarité de t, permet de montrer la proposition suivante.

■ **Proposition 3 :** E_q^p est engendré par les n^{p+q} tenseurs décomposables (15). Ces tenseurs sont libres dans E_q^p. On peut donc écrire tout élément de E_q^p selon :

$$t = \sum_{j_1 \ldots j_{p+q}} t^{j_1 \ldots j_p}_{j_{p+1} \ldots j_{p+q}} e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_p} \otimes e^{j_{p+1}} \otimes \ldots \otimes e^{j_{p+q}}$$

Un calcul tout à fait analogue à (6) montre que :

$$t^{j_1 \ldots j_p}_{j_{p+1} \ldots j_{p+q}} = t(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}, e^{j_{p+1}}, \ldots, e^{j_{p+q}}) \quad (16)$$

Remarque : on en déduit immédiatement que les tenseurs mixtes décomposables engendrent E_q^p.

En fait, à partir d'un système libre quelconque de p vecteurs (x_i) et de q formes (ω_j), on peut former les produits :

$$x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_p} \otimes \omega_{j_{p+1}} \otimes \ldots \otimes \omega_{j_{p+q}}$$

dans tous les ordres possibles. Ils formeront une base de E_q^p et il suffira de définir n'importe quelle opération multilinéaire sur ces produits pour l'étendre *de manière unique* à E_q^p tout entier. Cela justifie la définition (§ 2.2.2) de la contraction.

2.3.2 L'espace tensoriel des physiciens

Le paragraphe 1 a montré que l'on pouvait assimiler les vecteurs et les formes à des objets à n composantes associées aux différentes bases de E et se transformant suivant une certaine loi. Il est facile d'étendre ces considérations aux éléments de E_q^p.

Si $(t^{j_1 \ldots j_p}_{j_{p+1} \ldots j_{p+q}})$ sont les composantes d'un tenseur dans la base (e_i), quelles sont les composantes associées à une base (f_j) définie par $f_j = \sum a_j^i e_i$?

La base duale de (f_j) est alors $f^j = \sum b_i^j e^i$. Nous avons :

$$\begin{aligned} t &= \sum u^{i_1 \ldots i_p}_{i_{p+1} \ldots i_{p+q}} f_{i_1} \otimes \ldots \otimes f_{i_p} \otimes f^{i_{p+1}} \otimes \ldots \otimes f^{i_{p+q}} \\ &= \sum t^{j_1 \ldots j_p}_{j_{p+1} \ldots j_{p+q}} e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_p} \otimes e^{j_{p+1}} \otimes \ldots \otimes e^{j_{p+q}} \end{aligned}$$

les $u^{j_1 \ldots j_p}_{j_{p+1} \ldots j_{p+q}}$ étant les composantes de t sur la base :

$$f_{i_1} \otimes \ldots \otimes f_{i_p} \otimes f^{i_{p+1}} \otimes \ldots \otimes f^{i_{p+q}}$$

En identifiant, on déduit :

$$t^{j_1 \ldots j_p}_{j_{p+1} \ldots j_{p+q}} = \sum a^{j_1}_{i_1} \ldots a^{j_p}_{i_p} b^{j_{p+1}}_{i_{p+1}} \ldots b^{j_{p+q}}_{i_{p+q}} u^{i_1 \ldots i_p}_{i_{p+1} \ldots i_{p+q}} \quad (17)$$

Cette loi de passage entre anciennes et nouvelles composantes généralise évidemment les formules (1), (2) et (9). Nous pouvons utiliser cette loi de transformation pour donner une autre définition des tenseurs (définition *physique*).

■ **Définition :** un tenseur mixte d'ordre (p, q) est un système de n^{p+q} nombres qui se transforment par changement de base suivant la loi (17).

2.3.3 Équivalence avec la définition intrinsèque

Un calcul exactement analogue à celui du paragraphe 1.1 permet d'établir l'équivalence entre la définition *physique* (§ 2.3.2) et la définition *intrinsèque* (§ 2.1.1).

Une base (e_i) de E étant donnée, nous définissons l'élément :

$$t^{(e)} = \sum t^{(e)\,j_1 \dots j_p}_{j_{p+1} \dots j_{p+q}}\, e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_p} \otimes e^{j_{p+1}} \otimes \dots \otimes e^{j_{p+q}}$$

Une autre base (f_j) de E étant choisie, nous formons :

$$t^{(f)} = \sum t^{(f)\,j_1 \dots j_p}_{j_{p+1} \dots j_{p+q}}\, f_{j_1} \otimes \dots \otimes f_{j_p} \otimes f^{j_{p+1}} \otimes \dots \otimes f^{j_{p+q}}$$

où les systèmes de nombres $t^{(e)\,\cdots}$ et $t^{(f)\,\cdots}$ sont liés par une relation du type (17). Cette relation montre facilement que $t^{(e)} = t^{(f)}$.

Aux systèmes de nombres $t^{(e)}$ on peut donc associer un être de E^p_q indépendant de toute base. Cela fournit l'identification entre *tenseurs intrinsèques* (formes multilinéaires) et *tenseurs physiques* (systèmes de nombres attachés aux bases de E et se transformant suivant la loi (17).

Exemple : le tenseur de Kronecker

Montrons que le symbole de Kronecker δ^i_k est un tenseur. Nous devons vérifier :

$$\delta^i_k = \sum_\lambda a^i_\lambda\, b^\lambda_k\, \delta^i_k$$

Cette relation est bien exacte car (a^i_λ) et (b^λ_k) sont des matrices inverses [cf relation (3)].

La proposition suivante résume en fait l'identification des tenseurs intrinsèques et des tenseurs physiques.

Proposition 4 : pour qu'un système de n^{p+q} nombres $(t^{\vdots\vdots\vdots})$ puisse être considéré comme les composantes d'un tenseur mixte, il faut et il suffit que, quels que soient les vecteurs (x_i) et les formes (ω_j), la quantité :

$$\sum t^{j_1 \dots j_p}_{j_{p+1} \dots j_{p+q}}\, x^{j_1}_1 \dots x^{j_p}_p\, \omega_{1,\,j_{p+1}} \dots \omega_{q,\,j_{p+q}}$$

soit invariante par changement de base.

2.3.4 Convention d'Einstein

Les formules de sommation précédentes apparaissent très lourdes. Nous pouvons supprimer les symboles Σ, à condition de convenir que nous sommons sur les indices répétés deux fois (puisqu'ils sont alors nécessairement muets et donc indices de sommation). C'est la convention d'Einstein, particulièrement commode pour les formules tensorielles.

2.3.5 Multiplication et contraction des tenseurs physiques

En termes de composantes, la multiplication (14) devient :

$$(t \otimes t')^{j_1\, j_p\, j'_1\, j'_{p'}}_{i_1\, i_q\, i'_1\, i'_{q'}} = t^{j_1\, j_p}_{i_i\, i_q}\, t'^{j'_1\, j'_{p'}}_{i'_1\, i'_{q'}}$$

La contraction devient, *avec la convention d'Einstein* :

$$(C^i_j)\,(t)^{j_1\, j_{p-1}}_{i_1\, i_{q-1}} = t^{j_1 \dots \lambda \dots j_p}_{i_1 \dots \lambda \dots i_q}$$

où λ, répété deux fois, est un *indice muet* sur lequel on doit sommer.

Combinant ces opérations et le critère de tensorialité (proposition 4, § 2.3.3), on peut montrer la proposition suivante.

Proposition 5. Critère de tensorialité généralisé : pour qu'un système de n^{p+q} nombres soit un tenseur mixte, il faut et il suffit que, *contracté par un tenseur arbitraire*, le système obtenu soit un tenseur.

Remarques :

a) appliquant cela aux tenseurs $x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes \omega_1 \dots \otimes \omega_q$, on retrouve le critère de la proposition 4 ;

b) δ^i_k est bien un tenseur car, contractant avec un tenseur a^k_ℓ, $\delta^i_k\, a^k_\ell = a^i_\ell$ est bien un tenseur ;

c) la convention d'Einstein permet une application quasi automatique de ce critère.

2.4 Tenseurs euclidiens

2.4.1 Définition

L'identification de E et E^*, dans le cas où E est *pseudo-euclidien* (§ 1.3), permet de confondre les différents espaces E^p_q lorsque $p + q = r$ reste constant. On parle alors simplement de **tenseurs euclidiens d'ordre** r.

D'une manière analogue aux éléments d'un espace vectoriel euclidien, cf relations (13), un tenseur euclidien d'ordre r pourra avoir différentes représentations p fois contravariantes et q fois covariantes $(p + q = r)$.

Comme élément de E^p_q :

$$t^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q} = t(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, e^{i_1}, \dots, e^{i_q})$$

Comme élément de $E^{p'}_{q'}$, avec $p' + q' = p + q = r$:

$$t^{j_1 \dots j_{p'}}_{i_1 \dots i_{q'}} = t(e_{j_1}, \dots, e_{j_{p'}}, e^{i_1}, \dots, e^{i_{q'}})$$

La relation entre ces deux points de vue s'obtient, d'une manière analogue à (13), en utilisant les formules :

$$I^{<>}(e_i) = g_{ij}\, e^j \quad \text{et} \quad I^{<>-1}(e_j) = g^{ij}\, e_j$$

Exemple

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Pour } \textit{remonter} \text{ un indice covariant :} \\
\quad t^{j_1 \dots j_p j_{p+1}}_{i_1 \dots i_{q-1}} = g^{j_{p+1}\lambda}\, t^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_{q-1}\lambda} \\
\text{Pour } \textit{abaisser} \text{ un indice contravariant :} \\
\quad t^{j_1 \dots j_{p-1}}_{i_1 \dots i_q i_{q+1}} = g_{i_{q+1}\lambda}\, t^{j_1 \dots j_{p-1}\lambda}_{i_1 \dots i_q}
\end{array}\right\} \qquad (18)$$

Ces formules généralisent évidemment les relations (13). On remarquera qu'elles utilisent la multiplication de t et du tenseur deux fois covariant (g_{ij}).

On remarquera également que (g_{ij}) est un tenseur deux fois covariant car $< >$ est une forme bilinéaire sur $E \times E$.

Appliquant ce qui précède à (g_{ij}), nous avons :

$$g^{ij} = g^{i\lambda}\, g^{j\mu}\, g_{\lambda\mu}$$

$$g^i_j = g^{i\lambda}\, g_{\lambda j} = \delta^i_j$$

puisque (g_{ij}) et (g^{ij}) sont deux matrices inverses.

2.4.2 Produit scalaire de tenseurs euclidiens

Pour définir un produit scalaire sur E_q^p, il suffit de le définir sur les tenseurs décomposables :

$$< x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_q,\ y_1 \otimes \dots \otimes y_p \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_q > = \prod^p < x_i,\ y_i > \prod^q < \omega_j,\ \eta_j > \quad (19)$$

Remarques

a) Pour ce produit, si (e_i) est une base orthonormale d'un espace euclidien E, la base canonique (§ 2.3.1) associée à (e_i) de E_q^p est alors orthonormale.

b) On voit immédiatement que :

$$< t,\ t' > \ = t^{i_1 \dots i_p}\, t'_{i_1 \dots i_p} \quad (20)$$

3. Tenseurs antisymétriques. Formes extérieures

3.1 Définition

Il existe, dans $\overset{p}{\otimes} E$ (respectivement $\overset{p}{\otimes} E^*$), un sous-espace vectoriel remarquable : celui des tenseurs antisymétriques, qui admettent **deux définitions équivalentes** :

a) celle des *mathématiciens* : un tenseur antisymétrique p fois contravariant (respectivement covariant) est une forme multilinéaire antisymétrique sur $\prod^p E^*$ (respectivement $\prod^p E$) vérifiant, pour $v_k \in E^*$ (respectivement E) :

$$t(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) = -\, t(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p)$$

(on dit que t change de signe par *transposition des indices* i et j) ;

b) celle des *physiciens* : un tenseur antisymétrique p fois contravariant (respectivement covariant) est un système de n^p nombres vérifiant :

$$t^{i_1 \dots i_k \dots i_\ell \dots i_p} = -\, t^{i_1 \dots i_\ell \dots i_k \dots i_p}$$

(respectivement $\quad t_{i_1 \dots i_k \dots i_\ell \dots i_p} = -\, t_{i_1 \dots i_\ell \dots i_k \dots i_p}$)

On note $\overset{p}{\wedge} E$ (respectivement $\overset{p}{\wedge} E^*$) ce sous-espace de $\overset{p}{\otimes} E$ (respectivement $\overset{p}{\otimes} E^*$).

L'étude de détail nécessite auparavant quelques rappels.

3.2 L'espace $\overset{p}{\wedge} E$. Dimension et produit extérieur

3.2.1 Rappel sur les permutations d'indices. Symbole de Kronecker alterné

Soit $I = (i_1, \dots, i_p)$ et $J = (j_1, \dots, j_p)$ une permutation du p-uplet $(1, \dots, p)$. Nous pouvons passer de I à J en composant des transpositions en nombre σ_{IJ}. On peut démontrer [2] que la *parité* de σ_{IJ} ne dépend que de I et J et non de la manière dont on a réalisé le passage de I à J.

$\varepsilon_{IJ} = (-1)^{\sigma_{IJ}}$ est donc un invariant lié à I et J : c'est la *parité relative* de I par rapport à J. Notons que $\varepsilon_{IJ} = \varepsilon_{JI}$.

Remarque : si $I = (1, \dots, p)$, ε_{IJ} est appelé simplement *parité* de J.

On définit alors le *symbole de Kronecker alterné* par :

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} \begin{cases} = 0 \text{ si } I = (i_1, \dots, i_p) \text{ n'est pas une permutation} \\ \quad \text{de } J = (j_1, \dots, j_p) \\ = \varepsilon_{IJ} \text{ si } I \text{ est une permutation de } J \end{cases} \quad (21)$$

On vérifie que, pour un tenseur antisymétrique :

$$t_{j_1 \dots j_p} = \varepsilon^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p}\, t_{i_1 \dots i_p} \quad (22)$$

(ici, nous n'avons pas utilisé la convention d'Einstein).

3.2.2 Bases canoniques de l'espace des tenseurs antisymétriques

L'espace $\overset{p}{\wedge} E$ (respectivement $\overset{p}{\wedge} E^*$) admet des bases canoniques remarquables associées aux différentes bases de E et décrites par la proposition suivante.

Proposition 6 : l'espace $\overset{p}{\wedge} E$ (respectivement $\overset{p}{\wedge} E^*$) est de dimension $\mathscr{C}_n^p$:

$$\mathscr{C}_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (23)$$

À chaque base (e_i) de E est associée une base de $\overset{p}{\wedge} E$ définie par les p-vecteurs suivants (formes alternées sur $\prod^p E^*$) :

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}(e^{j_1}, \dots, e^{j_p}) = \varepsilon^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_p} \quad (24)$$

Cette notation sera justifiée au paragraphe 3.2.4. On laisse au lecteur le soin d'établir la proposition relative aux q-formes.

● **Preuve** (nous n'utilisons pas la convention d'Einstein). Nous pouvons écrire, d'après la relation (16) :

$$t = \sum_j t^{j_1 \dots j_p}\, e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_p}$$

Puisque t est antisymétrique :

$$t^{j_1 \dots j_p} = \varepsilon^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_p}\, t^{i_1 \dots i_p}$$

où $(i_1, \dots, i_p)$ est une permutation de $(j_1, \dots, j_p)$ telle que $i_1 < \dots < i_p$.

Il vient alors :

$$t = \sum_j \varepsilon^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_p}\, t^{i_1 \dots i_p}\, e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_p}$$

Nous pouvons réindexer la sommation précédente en sommant sur les $\mathscr{C}_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ p-uplets $(i_1, \dots, i_p)$ rangés dans l'ordre croissant et sur les $p!$ permutations de chacun de ces p-uplets, soit :

$$t = \sum_{i_1 < \dots < i_p} t^{i_1 \dots i_p} \sum_{j_1, \dots, j_p} \varepsilon^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_p}\, e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_p}$$

où $(j_1, \dots, j_p)$ est une permutation de $(i_1, \dots, i_p)$.

Notons $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} = \sum_{j_1, \ldots, j_p} \varepsilon^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p} e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_p}$. Il vient :

$$t = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} t^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$$

On peut alors montrer que :

a) les $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ (éléments de $\overset{p}{\otimes} E$) sont bien des *p*-formes alternées sur E^* (éléments de $\overset{p}{\wedge} E$) ;

b) ce sont des éléments indépendants de $\overset{p}{\otimes} E$; ils constituent donc une base de $\overset{p}{\wedge} E$; les $\mathscr{C}^p_n$ nombres $(t^{i_1 \ldots i_p})_{i_{1<\ldots<i_p}}$ sont appelés **composantes strictes** de t associées à cette base.

3.2.3 Antisymétrisé d'un tenseur

Un tenseur quelconque peut être rendu antisymétrique par l'opérateur d'antisymétrisation, très utile en mécanique quantique.

Si $t \in \overset{p}{\otimes} E$, nous définissons l'opérateur Al (*antisymétriseur*) par :

$$\mathrm{Al}(t)(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{i_1, \ldots, i_p} \varepsilon^{1 \ldots p}_{i_1 \ldots i_p} t(v_{i_1}, \ldots, v_{i_p})$$

où $(i_1, \ldots, i_p)$ est une permutation de $(1, \ldots, p)$ et $v_i \in E^*$.

La définition est analogue pour les éléments de $\overset{p}{\otimes} E$.

En termes de composantes, avec la convention d'Einstein :

$$\mathrm{Al}(t)^{i_1 \ldots i_p} = \varepsilon^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p} t^{j_1 \ldots j_p}$$

On vérifie que $\mathrm{Al}(t) = p!\, t$ **si et seulement si** t est antisymétrique.

Exemples :

a) $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ est l'antisymétrisé de $e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_p}$ où $(j_1, \ldots, j_p)$ est une permutation de $(i_1, \ldots, i_p)$.

b) Pour $p = 2$, $(\mathrm{Al}\, t)_{ij} = t_{ij} - t_{ji}$.

3.2.4 Produit extérieur

Si t et t' sont antisymétriques, $t \otimes t'$ n'est pas nécessairement antisymétrique. L'opérateur Al permet de définir une multiplication interne aux tenseurs antisymétriques comme suit.

Si $t \in \overset{p}{\otimes} E^*$, $t' \in \overset{q}{\otimes} E^*$, nous définissons (définition évidemment analogue pour les termes contravariants) :

$$t \wedge t' = \frac{1}{p!q!} \mathrm{Al}(t \otimes t')$$

soit explicitement :

$$t \wedge t'(v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q) = \frac{1}{p!q!} \sum \varepsilon^{1 \ldots p+q}_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q} t(v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}) t'(w_{j_1}, \ldots, w_{j_q})$$

On peut alors prouver les **propriétés** suivantes du produit extérieur :

a) il est distributif par rapport à l'addition des tenseurs ;
b) il est associatif : $t \wedge (t' \wedge t'') = (t \wedge t') \wedge t''$;
c) $t \wedge t' = (-1)^{pq} t' \wedge t$ si $t \in \overset{p}{\otimes} E^*$, $t' \in \overset{q}{\otimes} E^*$.

Remarques

1. La propriété *b*) permet d'écrire simplement $t \wedge t' \wedge t''$; on vérifie alors que $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$ est le produit extérieur de $e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}$ **dans cet ordre**, ce qui justifie la notation (24).
2. Soient (t_i), k éléments de E^* ; alors $t_1 \wedge \ldots \wedge t_k = 0$ *dès que l'un des t_i est combinaison linéaire des autres* : la propriété *c*) implique en effet que l'échange de deux éléments de E^* change le signe du produit, et par conséquent le produit est nul dès que deux des t_i sont égaux.
3. Les tenseurs antisymétriques d'ordre pair forment une algèbre commutative.

3.3 L'espace $\overset{n}{\wedge} E$. Déterminants

3.3.1 Déterminant d'un système de vecteurs

En faisant $p = n$ dans (23), on voit que l'espace $\overset{n}{\wedge} E$ est de dimension 1.

Si (e_i) est une base de E, $e_i \wedge \ldots \wedge e_n$ est la base associée.

Soit (x_i) un système de n vecteurs de E. Le **déterminant** de ce système dans la base (e_i) est par définition :

$$\Delta^{(e)} = (x_1, \ldots, x_n)$$

= composante stricte (§ 3.2.2) de $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ sur $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$.

Explicitons $\Delta^{(e)}(x_1, \ldots, x_n)$.

Comme $x_k = \sum_{i_k} x_k^{i_k} e_{i_k}$, par multilinéarité :

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \sum_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$$

D'après la remarque 2 (§ 3.2.4), $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} = 0$ dès que deux indices sont égaux. En réordonnant, il vient alors :

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \sum_{(i_1, \ldots, i_n)} \varepsilon^{1 \ldots n}_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} e_1 \wedge \ldots e_n$$

où $(i_1, \ldots, i_n)$ est une permutation de $(1, \ldots, n)$.

L'expression $\varepsilon^{1 \ldots n}_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$, égale à $\Delta^{(e)}(x_1, \ldots, x_n)$ est notée conventionnellement :

$$\Delta^{(e)}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1^1 \ldots x_j^1 \ldots x_n^1 \\ x_1^i \ldots x_j^i \ldots x_n^i \\ x_1^n \ldots x_j^n \ldots x_n^n \end{vmatrix} \qquad (25)$$

3.3.2 Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice

Soit un endomorphisme de E. Si (x_i) est un système de n vecteurs de E, $u(x_1) \wedge \ldots \wedge u(x_n)$ est un n-vecteur de $\overset{n}{\wedge} E$. Comme $\dim \overset{n}{\wedge} E = 1$, il existe $\lambda \in K$, tel que :

$$u(x_1) \wedge \ldots \wedge u(x_n) = \lambda x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$$

On peut prouver que λ **ne dépend que de** u **et non du système particulier choisi**. On note $\lambda = \det u$.

En particulier, si (e_i) est une base de E, $\lambda = \Delta^{(e_i)}_{[u(e_1) \ldots u(e_n)]}$.

Nous avons alors la propriété suivante.

Proposition 7 : $\det(uv) = \det u \det v$.

● **Preuve :** $u(e_1) \wedge \ldots \wedge u(e_n) = \det u \; e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$

$$v(e_i) \wedge \ldots \wedge v(e_n) = \det v \; e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

$$uv(e_i) \wedge \ldots \wedge uv(e_n) = \det u \det v \, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

Mais aussi, utilisant la remarque précédente :

$$u[v(e_1)] \wedge \ldots \wedge u[v(e_n)] = \det u \; v(e_1) \wedge \ldots \wedge v(e_n) = \det u \det v \, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

● **Corollaire**, immédiat en remarquant que $\det \mathrm{id}_E = 1$ (avec id_E = identité de E) :

$$\det u^{-1} = (\det u)^{-1}$$

Si A est la matrice associée à u dans la base (e_i), $\det A$ est par définition égal à $\det u$.

Comme $u(e_i) = \sum_j a_i^j e_j$:

$$\det A = \sum_{j_1, \ldots, j_n} \varepsilon^{j_1 \ldots j_n}_{1 \ldots n} \, a_1^{j_1} \ldots a_n^{j_n} \qquad \textbf{(26)}$$

où $(j_1, \ldots, j_n)$ est une permutation de $(1, \ldots, n)$.

Remarque : utilisant les notations de (21), $\varepsilon^{j_1 \ldots j_n}_{1 \ldots n} = \varepsilon^{1 \ldots n}_{j_1 \ldots j_n}$.

Si A^t est la transposée de A, sachant que $(A^t)^i_j = (A)^j_i$, on déduit alors que :

$$\det A = \det A^t \qquad \textbf{(27)}$$

3.4 Comportement des composantes strictes par changement de base

Une base (e_i) de E étant choisie, nous pouvons écrire, en utilisant la notation extérieure (24) :

$$t = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} t^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$$

Quel va être le comportement des composantes strictes $(t^{i_1 \ldots i_p})$ lorsqu'on décompose t sur la base $f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_p}$ associée à la base (f_j) de E définie par $f_j = \sum a^i_j e_i$ ou $e_i = \sum b^k_i f_k$?

La linéarité en chacun des termes permet facilement de montrer une formule du type :

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} = \sum_{k_1 < \ldots < k_p} \left| b^{k_j}_{i_j} \right|$$

en notant, pour simplifier l'écriture :

$$\left| b^{k_j}_{i_j} \right| = \begin{vmatrix} b^{k_1}_{i_1} \ldots b^{k_1}_{i_p} \\ b^{k_j}_{i_j} \\ b^{k_p}_{i_1} \ldots b^{k_p}_{i_p} \end{vmatrix}$$

Comme $t = \sum_{k_1 < \ldots < k_p} t'^{k_1 \ldots k_p} f_{k_1} \wedge \ldots \wedge f_{k_p}$, les relations de passage d'une base à l'autre s'écrivent :

$$t'^{k_1 \ldots k_p} = \sum_{k_1 < \ldots < k_p} \left| b^{k_j}_{i_j} \right| t^{i_1 \ldots i_p} \qquad \textbf{(28)}$$

Dans le cas covariant :

$$t'_{k_1 \ldots k_p} = \sum_{k_1 < \ldots < k_p} \left| b^{k_j}_{i_j} \right| t_{i_1 \ldots i_p} \qquad \textbf{(29)}$$

On en déduit la **définition des physiciens** relative à $\overset{p}{\wedge} E$ (respectivement $\overset{p}{\wedge} E^*$) : un p-tenseur antisymétrique contravariant (respectivement covariant) est un système de $\mathscr{C}^p_n = n!/[p!(n-p)!]$ nombres qui se transforment par changement de base suivant la loi (28), respectivement la loi (29).

3.5 Dualité dans le produit extérieur

3.5.1 Composantes strictes covariantes et contravariantes

L'existence d'un *produit scalaire* sur E avait permis d'identifier $\overset{p}{\otimes} E$ à $\overset{p}{\otimes} E^*$, les composantes covariantes et contravariantes étant reliées par la formule (18) appliquée p fois :

$$t^{j_1 \ldots j_p} = g^{j_1 i_1} \ldots g^{j_p i_p} t_{i_1 \ldots i_p}$$

Ce produit scalaire permet aussi d'identifier les sous-espaces $\overset{p}{\wedge} E$ et $\overset{p}{\wedge} E^*$ de $\overset{p}{\otimes} E$ et $\overset{p}{\otimes} E^*$. On doit alors trouver une **règle d'élévation et d'abaissement des indices**, relative aux **composantes strictes**, c'est-à-dire prendre $j_1 < \ldots < j_p$ dans la formule précédente. Celle-ci devient, après regroupement des termes et en remarquant que $t_{i_1 \ldots i_p} = 0$ dès que deux indices i_k et i_ℓ sont égaux :

— pour l'*élévation* :

$$t^{j_1 \ldots j_p} = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \begin{vmatrix} g^{j_1 i_1} \ldots g^{j_p i_1} \\ g^{j_k i_k} \\ g^{j_1 i_p} \ldots g^{j_p i_p} \end{vmatrix} t_{i_1 \ldots i_p}$$

— et pour l'*abaissement* :

$$t_{j_1 \ldots j_p} = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \begin{vmatrix} g_{j_1 i_1} \ldots g_{j_p i_1} \\ g_{j_k i_k} \\ g_{j_1 i_p} \ldots g_{j_p i_p} \end{vmatrix} t^{i_1 \ldots i_p} \qquad \textbf{(30)}$$

3.5.2 Produit scalaire dans le produit extérieur

Nous savons que $E^p_0 = \overset{p}{\otimes} E$ et $E^0_p = \overset{p}{\otimes} E^*$ admettent un produit scalaire si E est un espace pseudo-euclidien (§ 1.3). L'espace $\overset{p}{\wedge} E$ (respectivement $\overset{p}{\wedge} E^*$), comme sous-espace de $\overset{p}{\otimes} E$ (respectivement de $\overset{p}{\otimes} E^*$), admet donc aussi un produit scalaire. Il est facile de voir que, à un facteur $p!$ près, ce produit est celui donné sur les p-vecteurs par :

$$< x_1 \wedge \ldots \wedge x_p, y_1 \wedge \ldots \wedge y_p > = \begin{vmatrix} < x_1, y_1 > \ldots < x_1, y_p > \\ < x_p, y_1 > \ldots < x_p, y_p > \end{vmatrix} \qquad \textbf{(31)}$$

En particulier, si (e_i) est une base orthonormale d'un espace euclidien :

$$< e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p},\ e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_p} > = \delta^{i_1}_{j_1} \dots \delta^{i_p}_{j_p}$$

Si $(t^{i_1 \dots i_p})$ et $(t_{i_1 \dots i_p})$ sont les composantes strictes d'un tenseur antisymétrique pseudo-euclidien :

$$< t, t > = \sum_{i_1 < \dots < i_p} t^{i_1 \dots i_p}\, t_{i_1 \dots i_p} \qquad \textbf{(32)}$$

Cette formule s'obtient en utilisant la bilinéarité de < > et les formules (30) et (31).

3.5.3 Tenseur volume d'un espace pseudo-euclidien. Orientation

Soit (e_i) une base de E. La matrice associée à < > dans la base (e_i) est :

$$G^{(e)} = (g_{ij})$$

avec $g_{ij} = < e_i, e_j >$ (§ 1.3)

Si (f_j) est une autre base et $G^{(f)}$ la matrice associée, nous avons :

$$G^{(f)} = A^t\, G^{(e)}\, A$$

où A est la matrice de passage de (e_i) à (f_j).

Si $g^{(e)} = \det G^{(e)}$, alors : $g^{(f)} = \det G^{(f)} = (\det A)^2\, g^{(e)}$.

Si $\det A > 0$, nous pouvons écrire :

$$\sqrt{\pm\, g^{(f)}} = \det A\, \sqrt{\pm\, g^{(e)}} \qquad \textbf{(33)}$$

On reconnaît la formule de *transformation des composantes strictes covariantes* d'un n-tenseur antisymétrique Ω [formule (29)] avec $p = n$, défini dans la base (e_i) par :

$$\left.\begin{aligned} \Omega_{i_1 \dots i_n} &= \sqrt{\pm\, g^{(e)}}\ \varepsilon^{1 \dots n}_{i_1 \dots i_n} \\ \text{ou encore :}\qquad \Omega^{i_1 \dots i_n} &= \frac{\sqrt{\pm\, g^{(e)}}}{g^{(e)}}\ \varepsilon^{1 \dots n}_{i_1 \dots i_n} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(34)}$$

Dans l'ensemble des bases de E, considérons l'équivalence suivante : la base (e_i) est **équivalente** à (f_j) s'il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_n = \lambda e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

ou, ce qui revient au même, si la matrice de passage A de (e_i) à (f_j) est telle que $\det A > 0$ (en fait $\lambda = \det A$). Cet ensemble admet alors deux classes de bases équivalentes. Le choix d'une de ces classes est appelé **orientation** de E, et E est alors appelé *espace orienté.*

Sur chaque classe d'orientation de E, nous pouvons définir un tenseur, dit **tenseur volume**, à partir d'une base (e_i) de la classe et défini par (34). Les lois de transformation (28) et (29) des tenseurs antisymétriques sont alors respectées *sur les bases de la classe choisie et sur celles-ci seulement.*

3.5.4 Tenseur dual d'un tenseur euclidien

Les espaces $\overset{p}{\wedge} E$ et $\overset{q}{\wedge} E$ ayant même dimension si $p + q = n = \dim E$, nous pouvons construire un isomorphisme de l'un sur l'autre en appliquant bijectivement une base du premier sur le second. Nous pouvons essayer de trouver un isomorphisme entre ces espaces qui ne fasse pas référence explicite au choix d'une base dans chacun d'entre eux. D'autre part, si E est pseudo-euclidien, cet isomorphisme devra respecter l'identification (10) $I^{<>}$ entre E et E^*.

Soit $(E, < >)$ un espace pseudo-euclidien orienté. Supposons défini un tenseur volume Ω sur cette classe d'orientation. Si $t \in \overset{p}{\otimes} E$, nous définissons :

$$t^*_{i_1 \dots i_q} = \frac{1}{p!} \Omega_{i_1 \dots i_q\, j_1 \dots j_p}\ t^{j_1 \dots j_p},\ (p + q = n) \qquad \textbf{(35)}$$

Il est alors possible de prouver la proposition suivante.

Proposition 8

a) L'application * est un isomorphisme de $\overset{p}{\wedge} E$ sur $\overset{q}{\wedge} E$, compatible avec les règles d'abaissement et d'élévation des indices, ce qui se traduit par la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} t^{i_1 \dots i_q} \arrow[r, leftrightarrow, "*"] \arrow[d, leftrightarrow, "I^{<>}"'] & (t^*)_{i_1 \dots i_p} \arrow[d, leftrightarrow, "I^{<>}"] \\ t_{i_1 \dots i_q} \arrow[r, leftrightarrow, "*"] & (t^*)^{i_1 \dots i_p} \end{tikzcd}$$

b) * est une isométrie, soit :

$$< t^*, t^* > = < t, t >$$

c) $t^{**} = (-1)^{<>} (-1)^{pq}\, t$

avec $(-1)^{<>} = +1$ si < > a une signature avec un nombre pair de signes –,
$(-1)^{<>} = -1$ si < > a une signature avec un nombre impair de signes –.

Exemple : produit vectoriel dans un espace pseudo-euclidien

Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$ un système de $n - 1$ vecteurs dans un espace pseudo-euclidien orienté. Nous définissons le produit vectoriel de $(x_1, \dots, x_{n-1})$ par :

$$x_1 \times \dots \times x_{n-1} = (x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1})^* \qquad \textbf{(36)}$$

On vérifie que (avec la convention d'Einstein) :

$$(x_1 \times \dots \times x_{n-1})_i = \Omega_{i i_1 \dots i_{n-1}}\ x_1^{i_1} \dots x_{n-1}^{i_{n-1}}$$

On peut voir que ce sont les composantes de la forme (selon la notation du paragraphe 3.3.1) :

$$x \mapsto \Delta^{(e)}(x, x_1, \dots, x_{n-1})$$

3.5.5 Pseudo-tenseurs. Vecteurs axiaux

L'isomorphisme * est explicitement lié au choix d'un tenseur volume sur E et donc d'une orientation. Le système de nombres $(t^*)_{i_1 \dots i_q}$ ne se transforme pas comme les composantes d'un tenseur pour les changements de base qui sortent de la classe d'orientation qui définit le tenseur volume. Les êtres de ce type sont des **pseudo-tenseurs d'ordre** q.

Dans le cas où E est l'espace euclidien habituel à trois dimensions, une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) permet de définir un volume par :

$$\Omega_{(e)\, ijk} = \varepsilon_{ijk}$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ dans E vérifie alors, d'après (35) :

$$(\vec{x} \wedge \vec{y})^i_{(e)} = \varepsilon^{ijk}\, x^j\, y^k$$

Si l'on choisit la base $(-e_1, -e_2, -e_3)$, le volume devient :

$$\Omega_{(-e)\, ijk} = \varepsilon_{ijk}$$

et les composantes :

$$(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y})^i_{(-e)} = \varepsilon^{ijk} x'^j y'^k = (\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y})^i_{(e)} \qquad \textbf{(37)}$$

avec $x'^j = -x^j$ et $y'^k = -y^k$, d'où les vecteurs :

$$(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y})_{(-e)} = -(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y})_{(e)} \qquad \textbf{(38)}$$

La relation (37) montre que la loi de transformation (1) n'est plus respectée, et l'égalité (38) montre qu'on ne peut plus associer un élément de E intrinsèquement choisi (ne dépendant pas de l'orientation). Pour pouvoir l'associer, il faudrait choisir une loi de transformation du type :

$$x = \frac{\det A}{|\det A|} A x' \qquad \textbf{(39)}$$

Les systèmes de n nombres $x = (x^i)$ qui se transforment selon (39) sont appelés **vecteurs axiaux.**

4. Application du calcul tensoriel à la relativité restreinte

4.1 Introduction et rappels

Le calcul tensoriel trouve une application particulièrement remarquable dans la théorie de la relativité. Il ne faut pas y voir une simple illustration de la théorie des tenseurs. Le type de problèmes posés et l'historique de ces théories manifestent une espèce de stimulation réciproque. Il se trouve en effet que la possibilité d'exhiber un tenseur (comme *objet intrinsèque* de E^p_q § 2.1) associé à une correspondance du type :

$$(e_i) \mapsto t^{(e_i)\, i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$$

(*tableaux de nombres* indexés par des bases d'espace vectoriel et respectant la loi (17) détaillée § 2.3.2) n'est que la traduction mathématique du travail du physicien qui, ayant choisi un système de référence (horloge et règle), écrit des relations entre les quantités numériques attachées aux êtres physiques qui surgissent au cours des expériences effectuées dans ce système.

Rappelons brièvement les postulats physiques de la relativité restreinte.

4.1.1 Espace vectoriel de la relativité restreinte

Le cadre formel des phénomènes physiques (*événements*) est un espace vectoriel pseudo-euclidien ($E_4^{<\,>}$: *espace-temps*) à quatre dimensions, de signature (– + + +) (§ 1.3).

Le choix d'une base de E_4 telle que :

$$\left.\begin{array}{l} <e_\mu, e_\mu> = +1 (\mu = 1, 2, 3) \\ <e_0, e_0> = -1 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(40)}$$

induit une décomposition de tout vecteur de E_4 suivant :

$$x = (x_0, \overrightarrow{x})$$

avec x_0 composante temporelle de x,

$\overrightarrow{x} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} x^i e_i$ composante spatiale de x.

Cette terminologie se justifie en remarquant que la mécanique classique postule une décomposition universelle :

$$E_4 = T \otimes E_3$$

où T est un espace réel de dimension 1,

et E_3 l'*espace euclidien habituel* muni du produit scalaire :

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} x^i y^i$$

Chaque *base de Lorentz*, c'est-à-dire définie par les relations (40), induit donc une décomposition de l'espace-temps en temps comme pur paramètre et en espace à trois dimensions. Cette décomposition (et donc la temporalité et la spatialité qui y sont attachées) varie suivant le référentiel : aussi deux trièdres en *translation uniforme* l'un par rapport à l'autre n'induisent-ils pas la même décomposition.

Quoique le temps et l'espace soient en général différents dans deux référentiels de Lorentz quelconques, *quelque chose d'invariant* y subsiste et justifie une attention particulière. C'est l'objet du postulat suivant.

4.1.2 Postulat de *covariance* des équations de la relativité restreinte

Il existe un procès d'écriture commun aux équations de la physique associées à deux systèmes de coordonnées (x^i) et (x'^i) pourvu que :

a) $x^i = \sum_j a^i_j x'^j$ où les a^i_j soient des **constantes** ;

Remarque : cette condition justifie le nom de *relativité restreinte.* La *relativité générale* prétendra établir un procès d'écriture pour tous les points de vue issus de tous les changements de coordonnées possibles.

b) la matrice $A = (a^i_j)$ envoie les bases de Lorentz sur les bases de Lorentz.

Les changements de coordonnées d'un tel type sont appelés **transformations de Lorentz.**

Remarque : la condition *b*) implique que :

$$<Ax, Ay> = <x, y>$$

Dans une base de Lorentz, $<x, y>$ s'écrit $(x^0)^2 - \sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} (x^i)^2$.

Dans un système d'unités où la vitesse de la lumière dans le vide est égale à 1, les changements de coordonnées du type précédent laissent invariante l'équation de la sphère de propagation d'un signal lumineux :

$$|\overrightarrow{x}| = x^0$$

La vitesse de la lumière dans le vide est donc identique dans tous les référentiels de Lorentz, comme l'affirme l'expérience de Michelson. La relativité postule de plus que c'est la vitesse maximale de transmission de signaux d'influence.

4.1.3 Formulation mathématique de la *covariance* de la relativité restreinte

C'est le mérite d'Einstein d'avoir interprété physiquement les lois de transformation rendant possible l'équivalence entre tenseurs intrinsèques et tenseurs comme tableaux de nombres.

À chaque correspondance $(e_i) \mapsto t^{(e_i)}_{\cdots}$, le mathématicien associe un être de E^p_q bien défini. Pour le physicien, l'*existence de l'objet* sera assurée par la cohérence des points de vue qui le détectent dans les différents repères. Cette cohérence n'est autre que le respect des lois de transformation tensorielles et *la covariance de la relativité n'est autre que l'affirmation de la nature tensorielle* des différentes quantités numériques figurant dans les équations de mouvement ou de conservation. Le problème consistera donc à reformuler l'électromagnétisme et la mécanique en termes de tenseurs. Ce travail de reformulation aura donc deux aspects :

— en ce qui concerne la **cinématique** classique, rendue manifestement caduque par l'expérience de Michelson, il faudra forger de nouveaux concepts en se laissant guider par le caractère *covariant* de la nouvelle mécanique ;

— en ce qui concerne l'**électromagnétisme**, dont la formulation classique par équations de Maxwell est compatible avec les résultats de Michelson, il faudra simplement trouver les tenseurs associés au champ électromagnétique.

4.1.4 Champs tensoriels

L'existence d'un procès d'écriture de la physique dans les référentiels de Lorentz (covariance) est donc assurée si les grandeurs sont des tenseurs. Nous pouvons alors formuler mathématiquement ce principe comme suit.

Proposition 9 : la cinématique, la dynamique et l'électromagnétisme de la relativité associent à chaque point x de E_4 et à chaque base (e_i) des quantités $t^{(e_i)\, i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p}$ telles que :

— la correspondance $(e_i) \mapsto t^{(e_i)\,\ldots}_{\ldots}$ vérifie les lois de transformation tensorielles ;

— l'application $x \mapsto t^{(e_i)\,\ldots}_{\ldots}(x)$ est deux fois différentiable (article [AF 55] *Calcul différentiel* dans le présent traité) ; nous appellerons de tels objets **champs tensoriels** sur E_4.

Le **postulat de covariance** s'énonce alors comme suit : les grandeurs physiques de la relativité sont des champs tensoriels sur $(E_4, <\,>)$.

4.1.5 Dérivation des champs tensoriels

Nous rappelons (article [AF 55] *Calcul différentiel* dans le présent traité) que si f est une fonction numérique différentiable sur un espace E, la différentielle $\mathrm{D}\, f(x)$ au point x est une forme sur E. Si (e_i) est une base de E et (e^i) la base duale, notons $\mathrm{d}x^i$ le champ de 1-formes : $x \mapsto e^i$ (champ constant). $\mathrm{D}\, f(x)$ s'écrit alors :

$$\mathrm{D} f(x) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\, \mathrm{d}x^i$$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x)\right] = \left[\partial_i f(x)\right]$ constitue donc un champ de tenseurs de E^0_1.

Si E est pseudo-euclidien, les composantes contravariantes sont :

$$\partial^i f = \sum_j g^{ij}\, \partial_j f$$

$(\partial^i f)$ est un élément de E^1_0 appelé le **gradient** de f.

La généralisation à un champ de tenseurs de E^p_q est immédiate.

On vérifie facilement que, si $t \in E^p_q$, le système :

$$(\partial_i\, t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}) = \frac{\partial\, t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x)}{\partial x^i}$$

est un tenseur de E^p_{q+1}, c'est-à-dire que les relations fondamentales sont vérifiées pour les **applications linéaires** induites par les changements de base.

Remarque : dans le cas de la *relativité restreinte*, le problème de la différentiation des champs de tenseurs est particulièrement simple car on autorise les changements de coordonnées linéaires où :

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\, AX(x) = A \frac{\partial X(x)}{\partial x^i}$$

Le problème de la *relativité générale* consistera à construire des objets *intrinsèques* par différentiation.

Exemples :

— si (x_i) est une forme de E^0_1, $\partial_j\, x_i - \partial_i\, x_j = (\mathrm{rot}\; x)_{ij}$ est un champ sur E à valeur dans $\overset{2}{\wedge} E$.

— si (x^i) est un vecteur, $\partial_j\, x^i$ est dans E^1_1 ; le contracté $\mathrm{div}\; x = \sum_i \partial_i\, x^i$ est un scalaire.

4.2 Géométrie de la relativité

4.2.1 Spatialité. Temporalité. Causalité

Conformément aux paragraphes précédents, nous devons nous attendre à pouvoir interpréter les grandeurs indépendantes des bases de Lorentz (tenseurs de E^0_0 ou scalaires) en termes intrinsèques (non liés à l'observateur choisi).

Si x_1 et x_2 sont deux vecteurs événements de $(E_4, <\,>)$, $< x_1 - x_2, x_1 - x_2 > = < \Delta\, x, \Delta\, x >$ est invariant par transformation de Lorentz.

On peut alors prouver facilement la proposition suivante.

Proposition 10

a) Si $< \Delta\, x, \Delta\, x > < 0$, il existe un signal (de vitesse strictement inférieure à celle de la lumière) qui peut s'échanger entre x_1 et x_2. Autrement dit, il peut exister un rapport de *causalité* entre ces événements, l'un pouvant influencer l'autre ; il existe d'ailleurs une transformation de Lorentz telle que :

$$\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta x^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |\, \Delta x^0 \,| = \sqrt{- < \Delta x, \Delta x >} \tag{41}$$

L'écart entre les deux événements x_1 et x_2 peut donc être appréhendé par un observateur lié à cette base comme un pur *écart de date*. Les vecteurs tels que $\Delta\, x$ sont appelés *vecteurs temporels*.

b) Si $<\Delta x, \Delta x> > 0$, il n'existe aucun signal qui puisse s'échanger entre x_1 et x_2 ; il n'existe pas de rapport de causalité entre eux ; il existe une base de Lorentz où :

$$\Delta x = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{bmatrix}$$

Un observateur peut appréhender instantanément x_1 et x_2 comme deux points de l'espace euclidien engendré par (e_1, e_2, e_3) ; l'*écart* entre x_1 et x_2 est purement *spatial*, de longueur $\sqrt{<\Delta x, \Delta x>}$. Δx est un vecteur spatial.

c) Si $<\Delta x, \Delta x> = 0$, il existe un signal qui peut s'échanger entre x_1 et x_2 à la *vitesse de la lumière* ; Δx est *isotrope*.

4.2.2 Temps propre et espace euclidien propre associés à un vecteur temporel

Si e est un vecteur temporel de $(E_4, < >)$, nous allons montrer qu'il existe une décomposition de E_4, associée à e, du type de la mécanique classique, c'est-à-dire $T_e \times R_e$, et incluant une temporalité et une spatialité propres.

■ **Proposition 11**

Si $<e, e> < 0$, il existe deux espaces T_e et R_e tels que :

a) $E_4 = T_e \times R_e$, dim $T_e = 1$, dim $R_e = 3$;
b) si $u \in T_e$, $v \in R_e$, alors $<u, v> = 0$;
c) $<v, v> > 0$ si v est $\neq 0$ et dans R_e (restreinte à R_e, l'application $< >$ devient euclidienne ; R_e est un espace au sens habituel).

● **Preuve** : soit R_e l'ensemble des vecteurs tels que $<e, v> = 0$ et T_e la droite engendrée par e. L'application $< >$ étant non dégénérée, dim $R_e = 3$ et $E_4 = R_e \times T_e$. Montrons que $<v, v> = 0$ si $v \in R_e$.

$$<e, v> = -e^0 v^0 + \vec{e} \cdot \vec{v} = 0$$

avec $e = (e^0, \vec{e})$ et $v = (v^0, \vec{v})$, d'où :

$$|e^0 v^0| = |\vec{e} \cdot \vec{v}|$$

Comme $<e, e> < 0$, $|\vec{e}| < |e^0|$.

Il vient donc $|e^0 v^0| > |\vec{e}||v^0|$.

Mais $|\vec{e} \cdot \vec{v}| \leqslant |\vec{e}||\vec{v}|$, donc $|e^0 v^0| = |\vec{e} \cdot \vec{v}|$ est impossible si $|\vec{v}| \leqslant |v_0|$, c'est-à-dire si $<v, v> \leqslant 0$.

$< >$ induit donc sur R_e une longueur euclidienne habituelle. Il existe donc une *horloge* et une *règle* liées à e, qui, à l'événement x, associent :

$$x^0(x) = -\frac{<x, e>}{<e, e>}$$

$$e(x) = \vec{x} \text{ avec } x = x^0(x)e + \vec{x}$$

Exemple physique de vecteurs temporels

Supposons donnée une particule mobile dans E_4. Dans une base de Lorentz, l'équation de sa trajectoire s'écrit :

$$[x^0, x^1(x^0), x^2(x^0), x^3(x^0)]$$

La vitesse est définie par $\vec{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx^1}{dx^0} \\ \dfrac{dx^2}{dx^0} \\ \dfrac{dx^3}{dx^0} \end{bmatrix} = \dfrac{d\vec{x}}{dx^0}$.

Si la particule se meut constamment *à une vitesse inférieure à celle de la lumière* $|\vec{v}|^2 < 1$, le vecteur $(1, \vec{v})$ est donc temporel ainsi que $(dx^0, d\vec{x}) = dx$.

Notons que $\sqrt{-<dx, dx>} = \sqrt{1-|\vec{v}|^2}\, dx^0$ et qu'il existe une base où, d'après (41) :

$$dx = \begin{bmatrix} \sqrt{1-|\vec{v}|^2}\, dx^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$ds = \sqrt{1-|\vec{v}|^2}\, dx^0$ est l'élément différentiel de temps lié à la décomposition de E_4 associée à u. C'est le *temps propre d'une horloge liée à la particule*. Il peut être utilisé pour paramétrer la trajectoire.

$u = \dfrac{dx}{ds}$ est alors un vecteur tel que $<u, u> = -1$.

4.3 Dynamique de la relativité

En dynamique classique, l'impulsion $\vec{p} = m\, d\vec{x}/dx^0$ est reliée aux forces par la formule :

$$\vec{F} = d\vec{p}/dx^0$$

Il est naturel de chercher l'équation correspondante de la relativité sous la forme :

$$f = d\,p/d\,s \text{ avec } p = m_0\, u = m_0\, d\,x/d\,s \qquad \textbf{(42)}$$

Interprétons m_0. Plaçons-nous dans le repère propre (T_u, R_u) associé au vecteur temporel u. La grandeur $d\,s$ est alors l'élément différentiel de temps du repère et, dans R_u, (42) s'écrit :

$$\vec{F} = d\vec{p}/ds$$

avec $f = (f^0, \vec{F})$ et $p = (p^0, \vec{p})$.

Dans ce repère, $dx^0 = d\,s$ et m_0 apparaît comme *la masse de la particule appréciée dans* (T_u, R_u) : c'est sa **masse au repos.**

Interprétons p^0. Suivant (42), $< p, p > = m_0$ et donc :

$$< p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x^0} > = 0 \text{ ou } p^0 \frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}x^0} = \vec{p} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}x^0}$$

soit encore : $\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}x^0} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}x^0}$.

$\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}x^0} = \vec{v} \cdot \vec{F}$ car $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}x^0} = \vec{F}$ et $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}x^0}$, d'où :

$$\mathrm{d}p^0 = (\vec{v} \cdot \vec{F})\,\mathrm{d}x^0$$

d p^0 est donc un travail élémentaire et $p^0 = \int \vec{v} \cdot \vec{F}\,\mathrm{d}x^0$ s'interprète comme une énergie.

Comme $p^0 = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_0^2}$, m_0 apparaît comme une énergie (*masse énergie* de la particule au repos) susceptible d'être libérée par collision.

4.4 Électromagnétisme en relativité

4.4.1 Rappel

Les phénomènes électromagnétiques (cf article spécialisé dans le présent traité) sont décrits par deux champs de vecteurs $\vec{E}$ (champ électrique) et $\vec{B}$ (champ magnétique) de l'espace euclidien E_3 habituel et qui satisfont les **équations de Maxwell** :

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial B}{\partial t} = 0,\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \textbf{(43)}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J},\ \mathrm{div}\,\vec{E} = \rho \qquad \textbf{(44)}$$

avec $\vec{J}$ vecteur courant,
ρ densité de charge.

Ces équations, écrites *avant la découverte de la relativité*, sont invariantes par le groupe de Lorentz et non pas par des changements de repère classiques du type $\vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{v}_0\,t$.

Pour ces changements de repère, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne se comportent pas comme des vecteurs : nous verrons en effet (§ 4.4.3) que si $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, il existe un repère où le champ est purement magnétique ou purement électrique. $(\vec{E}, \vec{B})$ doit être compris comme un couple d'objets associé à la temporalité et à la spatialité d'une décomposition particulière de E_4. $\vec{E}$ et $\vec{B}$ se comporteront comme des vecteurs à condition de se restreindre aux changements de base qui laissent cette décomposition intacte. Nous savons (§ 4.2.2) que le repère (T_u, R_u) entraîné par une particule en translation uniforme de vitesse $\vec{v}$ dans un repère (T_0, R_0) admet un temps propre $s = \sqrt{1 - |\vec{v}|^2}\ x^0$ différent du temps x^0 mesuré dans (T_0, R_0).

Il faut en fait associer un tenseur $\tau(\vec{E}, \vec{B})$, deux fois covariant sur E_4, au champ électromagnétique. τ devra avoir $3 + 3 = 6$ composantes. Il devra donc être antisymétrique $(\dim \overset{2}{\wedge} E_4 = 6)$.

4.4.2 Décomposition d'un tenseur relativement à un vecteur temporel

Soit e tel que $< e, e > = 1$. Pour x, y, nous pouvons écrire, relativement à (T_e, R_e) :

$$x = (\xi e, \vec{x}),\ y = (\xi' e, \vec{y})$$

Si τ est un tenseur de $\overset{2}{\wedge} E_4$:

$$\tau(x, y) = \xi' \tau(\vec{x}, e) + \xi \tau(e, \vec{y}) + \tau(\vec{x}, \vec{y}) \qquad \textbf{(45)}$$

fait apparaître une forme L de R_e et un tenseur antisymétrique F sur R_e donnés par :

$$L : \vec{x} \mapsto \tau(\vec{x}, e)$$
$$F : \vec{x}, \vec{y} \mapsto \tau(\vec{x}, \vec{y})$$

En termes de composantes dans une base $(e_0 = e, e_1, e_2, e_3)$

$$\left.\begin{array}{l} L_i = \tau(e_i, e_0) = \tau_{i0} \\ F_{ij} = \tau(e_i, e_j) = \tau_{ij} \end{array}\right\} \qquad \textbf{(46)}$$

Par dualité euclidienne dans R_e, si l'on a choisi une orientation de R_e, (L_i) devient un vecteur E_i de R_e et (F_{ij}) un vecteur axial :

$$B^i = \varepsilon^{ijk} F_{jk} \qquad \textbf{(47)}$$

Si l'on considère $\vec{E} = (E^i)$ et $\vec{B} = (B^i)$ comme des champs électrique et magnétique, (46) et (47) permettent d'écrire les équations de Maxwell sous la forme *covariante* :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial^i \tau_{ik} = 0 \\ \partial_k \tau^{*k\ell} = J^\ell \end{array}\right. \qquad \textbf{(48)}$$

avec $(J^\ell) = (\rho, \vec{J})$,
τ^* dual de τ pour l'orientation de E_4 induite par e et l'orientation de R_e.

Remarque : on retrouve en particulier l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^0} + \mathrm{div}\,\vec{J} = 0$$

qui s'écrit ici $\partial_\ell J^\ell = 0$

Elle s'obtient en remarquant que $\partial_\ell \partial_k \tau^{*k\ell} = 0$ puisque τ^* est antisymétrique.

4.4.3 Invariants du champ électromagnétique

Il existe des invariants remarquables construits à l'aide de F :

$$< F, F > = F_{ik} F^{ik} \text{ et } < F, F^* > = F_{ij} F^{*ij}$$

sont invariants par transformation de Lorentz.

Dans une base de Lorentz (e_0, e_1, e_2, e_3), F se décompose en deux vecteurs ($\vec{E}$, $\vec{B}$) donnés par les formules (46) et (47). Il vient alors :

$$< F, F > = |\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2$$

$$< F, F^* > = \vec{E} \cdot \vec{B}$$

On peut alors prouver la proposition suivante.

■ **Proposition 12**

Si $\vec{E} \cdot \vec{B} = < F, F^* > = 0$, le champ électrique et le champ magnétique sont orthogonaux dans n'importe quel repère.

De plus, si $< F, F > = |\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2 > 0$ (respectivement < 0), il existe un repère où le champ est purement électrique (respectivement purement magnétique), de la même façon qu'il existe des repères remarquables où $< \Delta x, \Delta x >$ devient pure distance spatiale ou pure distance temporelle (proposition **10**, § 4.2.1). Ainsi, comme longueur et intervalle de temps, le magnétisme et l'électrostatique ne sont que des aspects (liés à un observateur particulier) d'un même phénomène.

Si $< F, F > = 0$, $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ dans tous les repères.

Références bibliographiques

[1] LICHNEROWICZ (A.). – *Calcul tensoriel.* A. Colin (1956).

[2] SPIVAK (M.). – *Differential geometry.* Tome I. Publish or Perish.

[3] WEYL (M.). – *Temps. Espace. Matière.* Blanchard.